

صفحة	RS06	نموذج تجريبي لامتحان الوطني الموحد دورة يونيو 2021 - الموضوع -	SNB
2 4	P2F1	مادة الرياضيات - مسلك علوم الحياة والأرض ومسلك العلوم الفيزيائية - خيار فرنسية	♣♣

Exercice 1 : (3.5 points)

On considère la suite numérique (u_n) définie par $u_0 = \frac{3}{2}$ et pour n de $\mathbb{N}$; $u_{n+1} = \frac{1}{2021}u_n + \frac{2020}{2021}$

- 0.5 1) a) Montrer par récurrence que $u_n > 1$ pour tout entier naturel n
- 0.5 b) Vérifier que $u_{n+1} - u_n = \frac{2020}{2021}(1 - u_n)$ pour tout entier naturel n puis montrer que la suite (u_n) est décroissante.
- 0.25 c) En déduire que $u_n \leq \frac{3}{2}$ pour tout entier naturel n
- 2) Soit (v_n) la suite numérique telle que : $v_n = u_n - 1$ pour tout entier naturel n
- 0.5 a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2021}$
- 0.5 b) Exprimer v_n en fonction de n
- 1.5 3) Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln \left(\frac{e^{v_{n+1}} - e}{v_n} \right) = 1$ et en déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(u_n)}{u_n - 1} = 1$

Exercice 2 : (5points)

- 0.75 1) Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation (E) pour $\alpha = \frac{\pi}{4}$ tel que :
- $$(E) : z^2 - 2\sqrt{2} \cos(\alpha) z + 4 \tan(\alpha) = 0$$
- 2) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A , B et C d'affixes respectives :
- $$a = 1 - \sqrt{3} - (\sqrt{3} + 1)i ; b = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} ; c = -6 + 6i$$
- 0.75 a) Écrire b sous forme exponentielle et vérifier que $b^{2021} = \bar{b}$
- 0.75 b) Montrer que $a = \frac{-i\bar{c}}{3b^{2021}}$ et prouver que $\text{Arg}(a) \equiv -\frac{7\pi}{12} [2\pi]$
- 1 c) En déduire que $a = 2\sqrt{2} \left(\cos \frac{7\pi}{12} - i \sin \frac{7\pi}{12} \right)$ puis déterminer la valeur exacte de $\cos \left(\frac{7\pi}{12} \right)$
- 3) La rotation $\mathcal{R}$ de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{3}$ transforme le point M d'affixe z au point M' d'affixe z' .
- 0.75 a) Vérifier que $z' = -bz$ et montrer que $d = -3a$ est l'affixe du point D image du point C par la rotation $\mathcal{R}$.
- 0.25 b) En déduire que les points A , D et O sont alignés.
- 0.75 c) Déterminer une solution de l'équation $z^2 - z = 9a^2 + bc$

Exercice 3 : (1.75 points)

Soit $w(x)$ la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $w(x) = -x + 1 + xe^{2x+2}$

- 0.25 1) Étudier la dérivabilité de la fonction w au point d'abscisse $x_0 = 0$
- 0.25 2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $w(x) = 1$
- 0.5 3) a) Vérifier que $2w(x) + w'(x) - w''(x) = 1 - 2x - 3e^{2x+2}$
- 0.75 b) En déduire W la fonction primitive de la fonction w tel que $W(-1) = -\frac{7}{4}$

صفحة	RS06	نموذج تجريبي لامتحان الوطني الموحد دورة يونيو 2021 - الموضوع -	SNB
3 4	P2F1	مادة الرياضيات - مسلك علوم الحياة والأرض ومسلك العلوم الفيزيائية - خيار فرنسية	♣♣

Problème : (10.25points)

Partie I :

Soit h la fonction numérique définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par : $h(x) = x - 1 - \ln x$

- 1) Vérifier que $h(1) = 0$
- 2) A partir du tableau de variation de la fonction h ci-dessous :

x	0	1	$+\infty$
$h'(x)$		—	+
$h(x)$	$+\infty$	$h(1)$	$+\infty$

Montrer que $h(x) \geq 0$ pour tout x appartenant à l'intervalle $]0, +\infty[$.

Partie II :

Soit g la fonction numérique définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$ par : $g(x) = x + (x - 2) \ln x$

- 1) Vérifier que $(\forall x \in]0; +\infty[) ; g(x) = 1 + h(x) + (x - 1) \ln x$
- 2) Montrer que $(x - 1) \ln x \geq 0$ pour tout x appartenant à l'intervalle $]0, +\infty[$
- 3) En déduire le signe de $g(x)$ pour tout x appartenant à l'intervalle $]0, +\infty[$

Partie III :

On considère la fonction numérique f définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$ par :

$$f(x) = \ln x (x - \ln x) + 1$$

et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$. (Unité : 1cm)

- 1) Montrer que $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = -\infty$ et interpréter géométriquement le résultat.
- 2) a) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$
b) Montrer que la courbe (C_f) admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique de direction asymptotique celle de l'axe des ordonnées.
- 3) Écrire l'équation de la tangente (T) à la courbe (C_f) au point d'abscisse $x_0 = 1$
- 4) a) Vérifier que pour tout x appartenant à l'intervalle $]0, +\infty[; f(x) - x = (\ln x - 1)h(x)$
b) Résoudre dans l'intervalle $]0, +\infty[$ l'équation $(\ln x - 1)h(x) = 0$
c) Étudier la position relative de la courbe (C_f) et la tangente (T) .
- 5) a) Montrer que pour tout x appartenant à l'intervalle $]0, +\infty[; f'(x) = \frac{g(x)}{x}$
b) Montrer que f est croissante sur l'intervalle $]0, +\infty[$
c) Dresser le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $]0, +\infty[$

صفحة	RS06	نموذج تجريبي لامتحان الوطني الموحد دورة يونيو 2021 - الموضوع -	SNB
4	P2F1	مادة الرياضيات - مسلك علوم الحياة والأرض ومسلك العلوم الفيزيائية - خيار فرنسية	♣♣

- 0.5 6) Montrer que $f(x) \leq x$ pour tout x appartenant à l'intervalle $[1, e]$
- 0.75 7) Construire dans le même repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, la tangente (T) et la courbe (C_f) (On admettra que la courbe (C_f) possède un seul point d'inflexion dont l'abscisse est comprise entre 1 et 1.5)

Partie IV :

Soit (u_n) la suite numérique définie par $u_0 = \sqrt{e}$ et pour tout n de $\mathbb{N}$; $u_{n+1} = f(u_n)$

- 0.5 1) Montrer par récurrence que $1 \leq u_n \leq e$ pour tout entier naturel n
- 0.25 2) Montrer que la suite (u_n) est décroissante (On pourra utiliser le résultat de la question III-6))
- 0.5 3) En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

Partie V :

- 0.5 1) Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que $\int_1^e x \ln x \, dx = \frac{e^2+1}{4}$
- 0.75 2) Montrer que la fonction $x \mapsto x \ln x - x$ est une fonction primitive de la fonction $x \mapsto \ln x$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$ puis montrer à l'aide d'une intégration par parties que $\int_1^e (\ln x)^2 \, dx = e - 2$
- 0.5 3) Calculer, en cm^2 l'aire du domaine plan limité par la courbe (C_f) et la droite d'équation $y = 1$ pour tout $1 \leq x \leq e$

الله ولي التوفيق

